

Окружность и сфера скоростей для упругих столкновений с перераспределением масс

Рассмотрим сначала нерелятивистское столкновение частиц типа

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2'. \quad (1)$$

Предполагается, что суммарные энергия, импульс и масса частиц сохраняются:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \bar{v}_1^2 + m_2 \bar{v}_2^2 &= m_1' \bar{v}_1'^2 + m_2' \bar{v}_2'^2 \\ m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 &= m_1' \bar{v}_1' + m_2' \bar{v}_2' \\ m_1 + m_2 &= m_1' + m_2' \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Задача, которая здесь ставится - это геометрическое описание всех потенциально возможных диаграмм скоростей при столкновениях типа (1) (заметим, что массы частиц не предполагаются заданными).

Здесь мы будем иметь дело с различными комбинациями из четырёх векторов $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_1', \bar{v}_2')$. Некоторые из них могут соответствовать скоростям до и после столкновения типа (1). В последнем случае назовём комбинацию $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_1', \bar{v}_2')$ *допустимой*. Точнее, комбинация $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_1', \bar{v}_2')$ *допустима* в том и только том случае, если система линейных уравнений (2) имеет по крайней мере одно решение относительно неизвестных масс m_1, m_2, m_1', m_2' , причём искомые массы обязаны быть положительными. В нашу задачу входит установить геометрический смысл того, что данная комбинация векторов *допустима*.

Под диаграммой скоростей будем понимать изображение векторов скоростей $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_1', \bar{v}_2'$ в виде направленных отрезков с общим началом. Концы этих векторов будет удобно обозначать

теми же буквами V_1, V_2, V_1', V_2' . Таким образом, наша задача сводится к описанию всех *допустимых* пространственных конфигураций из четырёх точек (V_1, V_2, V_1', V_2') , которые могут образовать диаграмму скоростей для потенциально возможного столкновения типа (1).

Назовём конфигурацию четырёх точек *вырожденной*, если какие-либо три из четырёх точек лежат на одной прямой. Далее мы ограничимся только конфигурациями *общего вида*, которые не являются *вырожденными*. *Вырожденный* случай представляет собой несколько более специальную задачу, которая требует в принципе отдельного рассмотрения.

Основной результат, который далее доказывается, следующий. Для того, чтобы конфигурация (V_1, V_2, V_1', V_2') являлась *допустимой*, необходимо и достаточно, чтобы все точки лежали на одной окружности, причём в таком порядке, что отрезки V_1V_2 и $V_1'V_2'$ пересекаются (см. рис. 1).

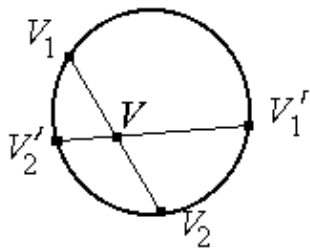


Рис. 1. Диаграмма скоростей при столкновении типа (1).

Сначала докажем необходимость. Допустим, что $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_1', \bar{v}_2')$ являются векторами скорости при столкновении типа (1). Легко доказать, что отрезки V_1V_2 и $V_1'V_2'$ пересекаются. Действительно, введём скорость центра масс $\bar{v} = (m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2) / M = (m_1'\bar{v}_1' + m_2'\bar{v}_2') / M$, где $M = m_1 + m_2 = m_1' + m_2'$. Очевидно, что точка V является общей для отрезков V_1V_2 и $V_1'V_2'$ и, следовательно, они пересекаются. Отсюда видно, что точки V_1, V_2, V_1', V_2' лежат в пределах одной

плоскости. Введём в этой плоскости декартову систему координат (x, y) . Соотношения (2) представляют собой однородную систему линейных уравнений. Чтобы имелось нетривиальное решение этой системы относительно неизвестных масс, необходимо, чтобы её определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_1'^2 + y_1'^2 & x_2'^2 + y_2'^2 \\ x_1 & x_2 & x_1' & x_2' \\ y_1 & y_2 & y_1' & y_2' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

где (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_1', y_1') , (x_2', y_2') - координаты точек V_1, V_2, V_1', V_2' соответственно. Заметим, что функция

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_1'^2 + y_1'^2 & x_2'^2 + y_2'^2 \\ x & x_2 & x_1' & x_2' \\ y & y_2 & y_1' & y_2' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

представляет собой многочлен вида $a(x^2 + y^2) + b_1x_1 + b_2x_2 + c$, где a, b_1, b_2, c - некоторые константы, причём $a \neq 0$ (так как точки V_2, V_1', V_2' не лежат на одной прямой и соответствующий определитель отличен от нуля). Следовательно, уравнение $D(x, y) = 0$ описывает окружность в плоскости столкновения. Очевидно, что именно на этой окружности и лежат все четыре точки V_1, V_2, V_1', V_2' .

Докажем достаточность. Предположим, что точки V_1, V_2, V_1', V_2' лежат на одной окружности, причём отрезки V_1V_2 и $V_1'V_2'$ пересекаются в точке V . Снова введём декартовы координаты (x, y) точек V_1, V_2, V_1', V_2' на плоскости, в которой лежит окружность. Условие того, что все четыре точки лежат на одной окружности, будет равносильно равенству (3). При этом система линейных уравнений (2) будет иметь некоторое

нетривиальное решение $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}'_1, \tilde{m}'_2)$. Далее выберем систему отсчёта с началом в точке V , так чтобы было $\tilde{m}_1 \bar{v}_1 + \tilde{m}_2 \bar{v}_2 = \tilde{m}'_1 \bar{v}'_1 + \tilde{m}'_2 \bar{v}'_2 = 0$. При этом легко получить, что $\tilde{m}_1 : \tilde{m}_2 = |VV_2| : |VV_1|$, $\tilde{m}'_1 : \tilde{m}'_2 = |VV_2'| : |VV_1'|$. Учитывая также, что $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 = \tilde{m}'_1 + \tilde{m}'_2$, легко видеть, что $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}'_1, \tilde{m}'_2$ либо все положительны, либо все отрицательны. Умножая, в последнем случае, все $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}'_1, \tilde{m}'_2$ на (-1) , мы получим в результате положительное решение системы (2), то есть искомые массы.

Постановку задачи можно несколько изменить, если дополнительно изобразить "эффективную" скорость центра масс $\sqrt{2E / M}$. Условимся выбирать начало отсчёта в центре инерции, а плоскость столкновения считать горизонтальной. Рассмотрим шесть точек в трёхмерном пространстве:

$$V_1 : (x_1, y_1, 0), V_2 : (x_2, y_2, 0), V_1' : (x_1', y_1', 0), V_2' : (x_2', y_2', 0), \\ V_+ : (0, 0, \sqrt{2E / M}), V_- : (0, 0, -\sqrt{2E / M}).$$

Таким образом, мы откладываем "эффективную" скорость центра масс в вертикальном направлении, ортогональном плоскости рассеяния. Можно доказать, что при столкновении типа (1) все точки $V_1, V_2, V_1', V_2', V_+, V_-$ лежат на одной сфере в трёхмерном пространстве. Верно также обратное: если эти точки лежат на одной сфере, то соответствующая диаграмма может "материализоваться" при столкновении с некоторыми начальными и конечными массами. Для доказательства следует заметить, что, исключая массы из соотношений

$$\frac{m_1 |VV_1|}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 |VV_2|}{m_1 + m_2},$$

получаем, что

$$m_1 = \frac{|VV_2|}{|V_1V_2|} M, \quad m_2 = \frac{|VV_1|}{|V_1V_2|} M,$$

откуда

$$2E / M = \frac{m_1 |VV_1|^2 + m_2 |VV_2|^2}{m_1 + m_2} = |VV_1| |VV_2|.$$

Это означает, что V_+, V_- лежат на вертикальной окружности, построенной на V_1V_2 как на диаметре (рис. 2).

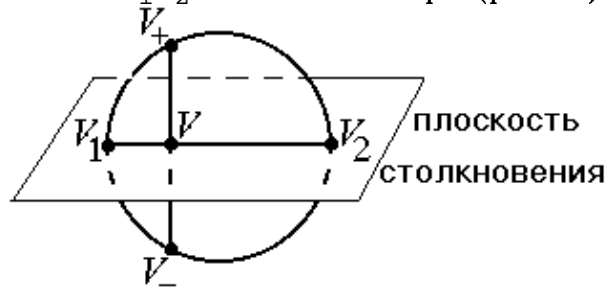


Рис. 2. Положение "эффективной" скорости центра масс относительно скоростей V_1, V_2 .

Построим сферу, большая окружность которой проходит через точки V_1, V_2, V'_1, V'_2 . Так как сечение этой сферы вертикальной плоскостью, проходящей через V_1V_2 , представляет собой именно ту окружность, которая изображена на рис. 2, то ясно, что точки V_+, V_- также (наряду с точками V_1, V_2, V'_1, V'_2) лежат на этой же сфере.

Теперь рассмотрим нерелятивистское столкновение частиц типа

$$1 + 2 + 3 \rightarrow 1' + 2'. \quad (5)$$

Назовём $V_1, V_2, V_3, V'_1, V'_2$ конфигурацией *общего вида*, если никакие 4 точки не лежат в одной плоскости. Аналогичным способом доказывается, что конфигурация *общего вида* $V_1, V_2, V_3, V'_1, V'_2$ является допустимой в том и только том случае, если все точки лежат на одной сфере, причём в таком порядке, что

отрезок V_1V_2' пересекает треугольник $V_1V_2V_3$ (понимаемый как часть плоскости).

Найдём возможные значения $2E / M$ в зависимости от положения центра масс внутри треугольника $V_1V_2V_3$. Считаем, что треугольник $V_1V_2V_3$ лежит в горизонтальной плоскости, а центр масс находится в некоторой точке V . Исключая массы из линейных уравнений, получаем:

Пока неясно, куда можно всунуть этот параграф

$$m_1 = \frac{d_1}{h_1} M, \quad m_2 = \frac{d_2}{h_2} M, \quad m_3 = \frac{d_3}{h_3} M, \quad (6)$$

где h_1, h_2, h_3 - высоты треугольника, d_1, d_2, d_3 - расстояния до соответствующих сторон. Отсюда:

$$\frac{2E}{M} = \frac{d_1}{h_1} |VV_1|^2 + \frac{d_2}{h_2} |VV_2|^2 + \frac{d_3}{h_3} |VV_3|^2$$

Восстановим из точки V перпендикуляр к плоскости треугольника $V_1V_2V_3$ и отложим на нём точки V_+, V_- на расстоянии $\sqrt{2E / M}$ от точки V (см. рис. 3).

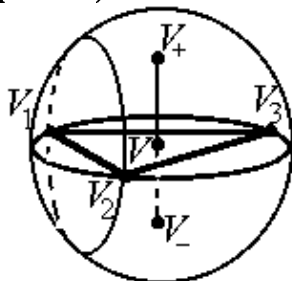


Рис. 3. Трёхмерный график "эффективной" скорости $\sqrt{2E / M}$ в зависимости от положения центра масс

Геометрическое место точек V_+, V_- представляет собой трёхмерный график "эффективной" скорости $\sqrt{2E / M}$ в зависимости от положения центра масс (V). Докажем, что он является сферой, большая окружность которой проходит через

точки V_1, V_2, V_3 . В частном случае, когда $m_3 = 0$, график сводится к окружности, построенной на отрезке V_1V_2 как на диаметре (см. также рис. 2).